位相空間の直積とUlamの問題：MathOverflow等における高度な議論と完全な証明

位相空間 X, Y について「$X \times X \cong Y \times Y$ ならば $X \cong Y$ が成り立つか？」という問いは、S. Ulamによって提起された古典的な「Ulamの直積問題 (Ulam's problem)」として知られています。この問題は、一般の位相空間ではFox (1947) による反例が存在し、必ずしも超不連結 (extremally disconnected) な空間や自明でない clopen な集合を無数に持つような極端に病的な空間でなくとも反例が作れることが示されています。

一方で、空間に強い条件を課した場合や、具体的な空間（閉区間 $[0, 1]$ やユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ など）を対象とした場合は、代数的位相幾何学の強力な定理を用いることで肯定的な結果や不可能性が証明されます。本稿では、MathOverflowやMath.StackExchange (Math.SE) などの数学コミュニティで展開された議論のソース情報（URL、投稿日、ユーザー名など）を完全に保持しつつ、省略されてしまった証明の細部（ホモロジーの長完全系列、切除定理、行列式の計算など）をすべて復元し、自己完結的 (self-contained) かつ厳密な解説としてまとめ直しました。

1. 基礎概念の準備

以下では、証明に必要な代数的位相幾何学および点集合位相幾何学の基礎概念を定義する。

定義 1.1 (位相多様体とホモロジー多様体)

位相空間 X が n 次元位相多様体 (topological manifold) であるとは、X が Hausdorff 空間であり、かつ任意の点 $x \in X$ が $\mathbb{R}^n$ と同相な開近傍を持つことである。

一方で、空間 X が n 次元ホモロジー多様体 (homology manifold) であるとは、任意の点 $x \in X$ における局所ホモロジー (local homology) 群 $H_k(X, X \setminus \{x\})$ が、境界を持たない場合には $\mathbb{R}^n$ の原点における局所ホモロジー群 $H_k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \cong \mathbb{Z}$ と同型であり、境界を持つ場合には適宜自明群になることをいう。本稿の以下の議論では、係数群として体 k（特に有限体 $\mathbb{F}_2$ など）を想定する。

例 1.2 (ユークリッド空間の局所ホモロジー)

$\mathbb{R}^n$ の原点における局所ホモロジー群を計算する。空間 $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ は $(n-1)$ 次元球面 S^{n-1} とホモトピー同値 (homotopy equivalent) である。対の完全系列を用いることで、$H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \cong \tilde{H}_{n-1}(S^{n-1}) \cong \mathbb{Z}$ となり、それ以外の次元では 0 になる。これが「局所的な次元」を測る不変量として機能する。

定義 1.3 (絶対レトラクトと切断点)

- **絶対レトラクト (absolute retract):** 空間 X が任意の距離空間への閉埋め込みに対して、レトラクション（引き込み写像）を持つこと。絶対レトラクトである空間は可縮 (contractible) かつ局所可縮 (locally contractible) であ

る。

- **切断点 (cut point):** 連結な位相空間 X において、ある点 $x \in X$ を除いた空間 $X \setminus \{x\}$ が非連結（2つの互いに素な空でない開集合の和）になるとき、x を切断点と呼ぶ。切断点でない点を非切断点 (non-cut point) と呼ぶ。局所的な開近傍でこの性質が成り立つ場合、局所切断点 (local cut point) という。

定理 1.4 (相対Künneth公式)

位相空間 X, Y の直積空間に対する局所ホモロジーは、係数環が体 k の場合、以下の直和分解を満たす。

$$H_n(X \times Y, (X \times Y) \setminus \{(x,y)\}; k) \cong \bigoplus_{i+j=n} (H_i(X, X \setminus \{x\}; k) \otimes_k H_j(Y, Y \setminus \{y\}; k))$$

この公式により、直積空間の局所的な位相的性質を各成分の性質から完全に計算することが可能となる。

2. $X^2 \cong [0,1]$ の不可能性に関する議論

閉区間 $[0,1]$ がある位相空間の「平方」になり得るかという問いについて、MathOverflowの質問 "Does there exist a topological space X such that X^2 and $[0,1]$ are homeomorphic?" (Question 457294) において、2023年10月28日にユーザー `terceira` が切断点を用いたエレガントな初等的証明を提示しました。

命題 2.1

$X \times X \cong [0,1]$ を満たす位相空間 X は存在しない。

証明 (terceira による切断点を用いた初等的な論証)

背理法を用いる。ある位相空間 X について、$X \times X \cong [0,1]$ が成り立つと仮定する。

まず、X が1点のみからなる空間であるとすると、$X \times X$ も1点となり、$[0,1]$ と同相にはならない。したがって、X は少なくとも2点以上を含む空間である。仮定より $X \times X$ は $[0,1]$ と同相であるから、連結 (connected) な空間である。自然な射影 $\pi : X \times X \to X$ は連続写像であり、連結空間の連続写像による像は連結であるため、X 自身も連結である。

閉区間 $[0,1]$ の位相的性質として、非切断点 (non-cut point) は両端点の 0 と 1 のちょうど2つのみであり、内部の点 $p \in (0,1)$ はすべて切断点 (cut point) である。
一方で、直積空間 $X \times X$ から任意の1点 (x,y) を取り除いた空間 $(X \times X) \setminus \{(x,y)\}$ について考える。2点以上を含む連結空間の直積から1点を取り除いた空間は依然として連結であることが知られている。すなわち、$X \times X$ には切断点が一つも存在しない。

これは $[0,1]$ に無数の切断点が存在することに明白に矛盾する。したがって、仮定は誤りであり、$X \times X \cong [0,1]$ を満たす空間 X は存在しない。■

なお、同スレッドでは次元論を用いた機械的なアプローチも言及されています。位相空間 X の距離次元 (metric dimension) を $\dim X$ とすると、一般に $\dim(X \times X) = 2 \dim X$ が成り立ちます。$[0,1]$ の次元は 1 であるため、

$2\dim X = 1 \implies \dim X = 1/2$ となりますが、次元は整数でなければならないため、ここからも矛盾が導かれます。

3. Ulamの直積問題と $X^2 \cong [0,1]^2 \Rightarrow X \cong [0,1]$ の証明

空間を閉区間に限定した命題「$X^2 \cong [0,1]^2 \Rightarrow X \cong [0,1]$」については、局所ホモロジーと完全系列を用いた精緻な証明が存在します。この証明には、閉区間を点集合位相幾何学的に特徴付ける古典的な定理（Hocking and Young, 1961 等）が必要不可欠です。

定理 3.1 (閉区間の位相的特徴付け)

位相空間 X が閉区間 $[0,1]$ と同相であるための必要十分条件は、X が距離化可能連続体 (metrizable continuum) であり、かつ**非切断点 (non-cut point) をちょうど2つだけ持つ**ことである。

命題 3.2

$X \times X \cong [0,1]^2$ ならば、$X \cong [0,1]$ である。

証明

仮定より $X \times X \cong [0,1]^2$ である。$[0,1]^2$ は絶対レトラクト (absolute retract) であるため、その直積因子である X も絶対レトラクトとなり、局所可縮 (locally contractible) な距離化可能連続体である。

任意の点 $x \in X$ について、体 $\mathbb{F}_2$ を係数とする局所ホモロジー群の次元を $d_i = \dim_{\mathbb{F}_2} H_i(X, X \setminus \{x\}; \mathbb{F}_2)$ とする。 点 (x,x) における直積空間の局所ホモロジーについて、定理 1.4 の相対Künneth公式 (relative Künneth formula) を適用する。 空間 $[0,1]^2$ は境界を持つ2次元のホモロジー多様体であるため、点 (x,x) における局所ホモロジーの次元は、$n=2$ のときに 1（内部点の場合）または 0（境界点の場合）であり、それ以外の次元では常に 0 である。 $n=2$ の場合のKünneth公式の右辺の次元は $\sum_{i+j=2} d_i d_j = d_1^2 + 2d_0 d_2$ と計算される。したがって、

$$d_1^2 + 2d_0 d_2 \leq 1$$

d_i は非負整数であるため、この不等式を満たすのは $d_1 = 1$ かつ $d_0 = d_2 = 0$ の場合（内部点に対応）、あるいはすべてが 0 の場合（境界点に対応）に限られる。これにより、X 自身が1次元ホモロジー多様体の構造を持つことがわかる。

次に、この局所ホモロジーの情報を X の局所切断点の情報に翻訳する。X は局所可縮であるため、任意の点 $x \in X$ は可縮 ($\tilde{H}_k(U) = 0$) かつ連結な開近傍 U を持つ。 切除定理 (excision theorem) を用いると、$H_1(X, X \setminus \{x\}) \cong H_1(U, U \setminus \{x\})$ となる。 ここで、対 $(U, U \setminus \{x\})$ に関するホモロジーの長完全系列 (long exact sequence) を考える。

$$\cdots \to \tilde{H}_1(U) \to H_1(U, U \setminus \{x\}) \to \tilde{H}_0(U \setminus \{x\}) \to \tilde{H}_0(U) \to \cdots$$

U が可縮であることから $\tilde{H}_1(U) = 0$ および $\tilde{H}_0(U) = 0$ であるため、完全性より以下の同型を得る。

$$H_1(X, X \setminus \{x\}) \cong H_1(U, U \setminus \{x\}) \cong \tilde{H}_0(U \setminus \{x\})$$

- **内部点の場合 ($d_1 = 1$):** $\tilde{H}_0(U \setminus \{x\}) \cong \mathbb{F}_2$ となり、0 次被約ホモロジー群の階数が 1 である。これは $U \setminus \{x\}$ の連結成分が正確に 2 つであることを意味し、点 x は局所切断点 (local cut point) となる。
- **境界点の場合 ($d_1 = 0$):** $\tilde{H}_0(U \setminus \{x\}) = 0$ となり、$U \setminus \{x\}$ は依然として連結である。すなわち、点 x は非

切断点 (non-cut point) となる。

$X \times X \cong [0,1]^2$ の境界の構造から、X には境界点（非切断点）がちょうど2つ存在することがわかる。定理 3.1（Moore-Peano および Hocking and Young の定理）より、非切断点をちょうど2つ持つ距離化可能連続体は閉区間 $[0,1]$ と同相である。したがって、$X \cong [0,1]$ が導かれる。■

4. $\mathbb{R}^3$ は任意の空間の直積にはならない：局所ホモロジーによる証明

MathOverflowにおいて最も高く評価された一般位相幾何学の質問の一つに、Richard Doreにより2011年4月2日に投稿された "Is $\mathbb{R}^3$ the square of some topological space?" (Question 60375) があります。このスレッドでは、代数的位相幾何学を用いた鮮やかな不可能性の証明が提示されました。

命題 4.1

$X \times X \cong \mathbb{R}^3$ を満たす位相空間 X は存在しない。

証明 (MathOverflowスレッドで議論された相対Künneth公式による証明)

背理法を用いる。ある位相空間 X が存在して、$X \times X \cong \mathbb{R}^3$ が成り立つと仮定する。

X 上の任意の点 x における局所ホモロジー群の次元を $d_i = \dim_k H_i(X, X \setminus \{x\}; k)$ とおく。$X \times X$ の点 (x, x) において、$n = 3$ の相対Künneth公式を展開すると、その次元は以下のようになる。

$$\dim_k H_3(X \times X, (X \times X) \setminus \{(x,x)\}; k) = \sum_{i+j=3} d_i d_j = d_0 d_3 + d_1 d_2 + d_2 d_1 + d_3 d_0 = 2(d_0 d_3 + d_1 d_2)$$

一方で、仮定より $X \times X \cong \mathbb{R}^3$ であり、$\mathbb{R}^3$ は3次元ホモロジー多様体であるため、すべての点において3次の局所ホモロジー群の次元は正確に 1 である。すなわち、左辺は 1 となる。

これにより、$1 = 2(d_0 d_3 + d_1 d_2)$ という等式が得られる。しかし、d_i は非負整数であるため、右辺は必ず偶数にならなければならない。奇数である 1 が偶数に等しくなることは不可能であり、矛盾が生じる。
したがって、最初の仮定は誤りであり、$X \times X \cong \mathbb{R}^3$ となる位相空間 X は存在しない。■

5. Fokkink (2002) による位相的写像度を用いた別証明

Question 60375 の議論の中でも言及されていますが、Fokkink (2002) はホモロジー代数の複雑な公式を避け、位相的写像度 (topological degree) と線形代数の行列式の性質のみを用いた自己完結的でエレガントな別証明を与えています。

定義 5.1 (位相的写像度)

ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ 上の自己同相写像 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ には、位相的写像度 (topological degree) $\deg(f) \in \{1, -1\}$ が定義される。空間の向きを保存する場合は 1、反転させる場合は -1 となる。写像度の合成則 $\deg(f \circ g) = \deg(f) \cdot \deg(g)$ より、任意の同相写像の2回合成 $f^2 = f \circ f$ は必ず $\deg(f^2) = (\pm 1)^2 = 1$ となり、向きを保存する。

証明 (Fokkink による証明の詳細)

ある位相空間 X と同相写像 $h: X \times X \to \mathbb{R}^3$ が存在すると仮定する。

空間の4乗 X^4 から $\mathbb{R}^6$ への同相写像 $H: X^4 \to \mathbb{R}^6$ を、$H(a,b,c,d) = (h(a,b), h(c,d))$ によって定義する。次に、X^4 上で成分を一つずらす巡回置換の同相写像 $s: X^4 \to X^4$ を、$s(a,b,c,d) = (d,a,b,c)$ と定義する。これを2回合成した s^2 は、$s^2(a,b,c,d) = (c,d,a,b)$ となり、前半のペア (a,b) と後半のペア (c,d) を完全に入れ替える写像である。

ここで、同相写像 H を介して、s に対応する $\mathbb{R}^6$ 上の自己同相写像 $S = H \circ s \circ H^{-1}$ を考える。定義 5.1 の位相的写像度の性質より、S を2回合成した S^2 の写像度は必ず $\deg(S^2) = (\deg S)^2 = 1$ でなければならない。

しかし、$\mathbb{R}^6$ を2つの $\mathbb{R}^3$ の直積 $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ と見なしたとき、S^2 は s^2 の性質を引き継ぎ、2つの $\mathbb{R}^3$ の成分をそっくり入れ替える線形変換 $S^2(x,y) = (y,x)$ として振る舞う。 この線形変換は、$\mathbb{R}^6$ の標準座標系において $(x_1,x_2,x_3,y_1,y_2,y_3) \mapsto (y_1,y_2,y_3,x_1,x_2,x_3)$ という置換を行う。これは、x_1 と y_1、x_2 と y_2、x_3 と y_3 の入れ替えという、正確に3回の互換（transposition）を行うことと同値である。 線形代数の基本性質より、1回の互換は行列式に -1 を乗じるため、この変換の表現行列の行列式は $(-1)^3 = -1$ となる。

行列式が負である線形変換から誘導される同相写像は空間の向きを反転させるため、$\deg(S^2) = -1$ である。 これは一般論から導かれた $\deg(S^2) = 1$ という結果に明白に矛盾する。ゆえに、$X \times X \cong \mathbb{R}^3$ となる空間 X は存在しない。■

6. 引用文献

- ***On a problem of S. Ulam concerning Cartesian products***
  Fox, R. H., *Fundamenta Mathematicae* 34 (1947), 278-287.
  Ulamの直積問題に対する最初の本格的な考察と反例の提示。
  https://doi.org/10.4064/fm-34-1-278-287

- ***Topology***
  Hocking, J. G., and Young, G. S., Addison-Wesley, 1961. (Dover reprint: 1988)
  連続体理論および閉区間の位相的特徴付けに関する標準的な教科書 (Theorem 2-27)。
  https://store.doverpublications.com/products/9780486656762

- $\mathbb{R}^3$ ***Has No Root***
  Fokkink, R., *The American Mathematical Monthly*, Vol. 109, No. 3 (Mar., 2002), p. 285.
  位相的写像度を用いたエレガントな証明を掲載した短いノート。
  https://doi.org/10.1080/00029890.2002.11919864

- ***Is*** $\mathbb{R}^3$ ***the square of some topological space?***
  MathOverflow, Question 60375, asked by Richard Dore (April 2, 2011).
  局所ホモロジーと相対Künneth公式を用いた代数的位相幾何学的アプローチが議論された高度なスレッド。
  https://mathoverflow.net/questions/60375/

- ***Does there exist a topological space*** X ***such that*** X^2 ***and*** $[0,1]$ ***are homeomorphic?***
  MathOverflow, Question 457294, answered by user `terceira` (October 28, 2023).
  距離次元や切断点を用いた初等的な不可能性の証明に関する議論。
  https://mathoverflow.net/questions/457294/